

FLORENCIO GONZÁLEZ ASENJO

*Universidad Buenos Aires*

## El laberinto del continuo

### I

#### 1. Leibniz y el continuo

La expresión “Laberinto del continuo” se debe a Leibniz, quien dedicó considerables esfuerzos hacia una clara comprensión de este tema tan intrincado como difícil. Leer sus escritos es siempre interesante y aleccionador, pero casi todos sus análisis se centran en la idea básica de la divisibilidad indefinida del continuo en contraste con el hecho de que no es posible dividir lo discreto más allá de cierto punto. Hay desde luego mucho que decir sobre sus ideas, pero por lo que hace al continuo, Leibniz carecía de los instrumentos conceptuales necesarios para tratar del tema adecuadamente<sup>1</sup>.

Sabemos hoy que la divisibilidad indefinida no es suficiente para caracterizar el continuo. Fue necesario tener a mano la teoría de conjuntos de Cantor para resolver el problema del continuo satisfactoriamente desde el punto de vista conjuntista. Quien lo hizo así de una manera cabal fue Richard Dedekind, con su idea de cortaduras efectuadas en la recta de puntos de coordenada racional. Brevemente: tomemos la recta de puntos de coordenada real y consideremos sólo los puntos racionales, esto es, puntos cuyas coordenadas están dadas por números expresables por cocientes de números enteros. Los griegos demostraron que hay números irracionales, números que no son expresables por cocientes de números enteros, descubrimiento que fue mantenido en secreto por un tiempo por ser considerado de mal agüero según la tradición. Pues bien, Dedekind toma la recta racional y la corta en dos mitades, una inferior y otra superior; hay por cierto muchas cortaduras posibles, pero en cada una todo punto de la parte inferior tiene coordenada racional menor que la de todo punto de la parte superior. Mas lo importante aquí es que algunas cortaduras poseen un punto racional que sirve de frontera, y otras no. Las cortaduras sin punto frontera determinan los puntos de coordenada irracional. Los puntos racionales e irracionales llenan la recta real por completo, y esta recta constituye un continuo.

Ahora bien, con los axiomas clásicos de la geometría euclidiana es imposible demostrar que no hay otros puntos en la recta que los ya indicados. Por lo tanto, es necesario agregar un axioma más, el llamado “axioma de completitud”, por el cual la recta sólo tiene puntos racionales o irracionales, y es así,

---

<sup>1</sup>G. W. LEIBNIZ, *The Labyrinth of the Continuum*, New Haven: Yale University Press, 2001.

por decreto, continua. Esta continuidad implica que la recta es (i) infinitamente divisible por cortaduras, y (ii) carente de un número finito o infinito de saltos; la recta racional no es continua porque tiene un salto a cada punto irracional, y entre dos puntos racionales distintos hay siempre un número infinito de puntos irracionales. Leibniz habría comprendido perfectamente esta concepción.

Debemos notar que si se suspende el axioma de completitud entonces reaparecen los saltos. Abraham Robinson lo hizo al introducir nuevos puntos no-estándar entre los puntos de coordenada real estándar. De esta manera estiró la recta considerablemente, pero también introdujo en ella un número infinito de huecos. La recta no-estándar de Robinson no es ya un continuo navegable sin interrupciones, pero él tenía otros objetivos en mente, no el de conservar la continuidad de la recta.

## 2. La divisibilidad, noción antinómica

El lingüista Charles Bally afirmó que “el contrario de toda palabra abstracta forma parte del sentido de esa palabra”<sup>2</sup>. Este principio semántico se aplica indudablemente al concepto de divisibilidad. Es imposible pensar lo divisible de otro modo que como opción a lo no divisible. Los dos conceptos van siempre de la mano toda vez que pensamos en ellos reflexivamente. Ésta es una de las razones por la cual no es posible tampoco reflexionar sobre el continuo sin traer a cuenta la idea de lo discreto, y viceversa. Subconscientemente pensamos por oposiciones, y como que la composición de oposiciones es una forma general de antinomicidad, divisible-indivisible, continuo-discreto, son decididamente pares de términos antinómicos. Es decir, no sólo las oraciones pueden ser antinómicas, sino que también lo son pares opuestos de substantivos, verbos, o adjetivos. Tales pares de términos opuestos forman pues círculos antinómicos que no tienen nada que ver directamente con la verdad o la falsedad de las oraciones de las que son parte; sólo afectan la manera en que concebimos ideas que, si las consideramos a fondo, son inseparables<sup>3</sup>.

## 3. El continuo dentro del marco de la mecánica cuántica

De acuerdo con la física cuántica, carece de sentido hablar de longitudes de espacios menores que la longitud de Planck ( $10^{-33}$  cm.), la longitud mínima posible, o duraciones inferiores al tiempo de Planck ( $10^{-43}$  de segundo), la duración mínima real. En otras palabras, el espacio de la física cuántica no es continuo, y tampoco lo es el tiempo. Las dimensiones espaciales y temporales están compuestas de cuantos discretos no divisibles.

¿Cómo comprender el significado de este último párrafo? Aparentemente describe una situación sencilla de entender. Sin embargo, no requiere mucha reflexión advertir que en verdad presenta problemas serios a nuestro entendi-

<sup>2</sup> C. Bally, citado por H. Geckeler, *Semántica Estructural y Teoría del Campo Léxico*, traducido por M. M. Hernández, Madrid: Gredos, 1976, p. 290.

<sup>3</sup> El tema está tratado en detalle en mi artículo por aparecer, “Círculos Viciosos”. También se lo discute en mi libro *Antiplatitudes*, Valencia: Universidad de Valencia, 1975, pp. 78-79, y en mi artículo “La Verdad, la Antinomicidad y los Procesos Mentales”, *Revista Latinoamericana de Filosofía*, Vol. VIII, 1, 1982, pp. 24-25.

miento. Específicamente: (i) ¿Dónde tienen lugar estos cuantos de espacio? Aunque considerar espacios de extensión menor que el límite de Planck nos está vedado como absurdo, no nos es posible pensar en sucesiones de cuantos espaciales sin ubicarlos mentalmente en un continuo abstracto subyacente. De hecho, las coordenadas geométricas de un cuanto espacial se dan con relación a un sistema de referencia euclidiano continuo: la física cuántica misma no puede evitar en su formalismo utilizar el continuo espacial como fondo en el cual localizar los cuantos. Es imposible manejar matemáticamente un cuanto real sin un continuo irreal de referencia. La cuestión subordinada que surge es: ¿en qué medida es irreal un concepto que es indispensable para aprehender y manipular una situación concreta?

(ii) Otro problema serio es el siguiente: dado que los cuantos tienen extensión positiva ¿qué contienen en su interior? Por cierto que un cuanto no puede reducirse a un punto con extensión; un punto, de acuerdo con la definición de Euclides, no tiene partes. Como que un cuanto no es ni un punto, ni es divisible en partes discretas, tiene que ser por fuerza un continuo, ya que no hay otra opción, pero entonces es un continuo indivisible. De lo contrario, el espacio estaría hecho de cuantos con extensión vacíos, puntos sin partes pero con extensión. De cualquier manera, caemos en una contradicción de la cual no es posible evadirnos.

Ambos problemas nos conducen a la conclusión de que el continuo contiene y está contenido en lo discreto. Lo discreto de un cuanto es un gajo de un fondo continuo divisible, y su interior es, por fuerza, un continuo indivisible. La mecánica cuántica produce una noción del continuo más laberíntica y antinómica de todo lo que pudo haber pensado Leibniz. La idea del continuo es ínsita en la idea de un espacio discreto; lo es así como cápsula y núcleo de lo discreto. Con la revelación de este hecho llegamos a la conclusión inesperada de que hay continuos muy pequeños que son indivisibles contrariamente a la caracterización del continuo que hemos dado antes. Nos hemos topado con el laberinto de lo discreto.

#### 4. Grados de continuidad y grados de separación

Hasta ahora hemos considerado el continuo y la separación como propiedades absolutas sin matices. Esto no corresponde a lo que observamos en la realidad. Tanto en la percepción, como en los fenómenos físicos nos encontramos con situaciones en las cuales las figuras no se despegan completamente del fondo, y en las que, por lo tanto, no es posible distinguir claramente la unidad de la pluralidad. En tales casos, los saltos y la continuidad son graduales, esfumados, y de los entes podemos decir con verdad que son parcialmente discretos y parcialmente continuos. En general, la realidad física, la realidad mental y el mismo lenguaje son a menudo intrínsecamente vagos; esto es, no son vagos por la falta de precisión de nuestros instrumentos de observación y análisis, sino porque lo son irremediabilmente. Esto implica que nuestras categorías fundamentales, especialmente los pares de categorías opuestas, deben ser concebidas cada una, no como una idea básica clara y distinta, sino como una gradación que, como tal, simplemente refleja la gradación inmanente de la realidad.

La física cuántica ha producido y sigue produciendo las más desconcertantes conclusiones contradictorias sobre la manera en que hemos de concebir el mundo. Dado que no hay duda alguna sobre el poder predictivo de esta disciplina verificada diariamente en toda clase de aplicaciones, quienes encuentran intolerable dejar de lado la manera ancestral de concebir las categorías básicas optan por negar la existencia de la realidad cuántica. No hay una realidad cuántica profunda, sostienen estos escépticos incapaces de aceptar que el mundo es intrínsecamente antinómico. Esto se aplica especialmente a las propias nociones de verdad y falsedad. Alfred North Whitehead dijo: “No hay verdades completas; toda verdad es parcial”<sup>4</sup>. En línea con esta posición, la lógica difusa considera la verdad y la falsedad como casos extremos de un continuo intermedio de grados de verdad y grados de falsedad. Y dado que tanto las oraciones como los hechos pueden tener al mismo tiempo un cierto grado de verdad y un cierto grado de falsedad, se concluye que esas oraciones y esos hechos tienen también un grado de antinomicidad. Sea lo que sea que se piense sobre la idea de dejar de lado la concepción absoluta de la verdad y la falsedad como nociones separadas e incompatibles, la lógica difusa —como la mecánica cuántica— ha demostrado tener innumerables aplicaciones científicas y técnicas valiosas. Los hábitos de pensamiento son difíciles de cambiar, pero las cosas son como son, y a la larga, desde luego, prevalecen.

Lejos, pues, de lamentar la existencia de gradaciones inescapables, debemos aceptarlas de buen grado y trabajar con ellas. Y una de las recompensas que tal actitud nos produce es la de cobrar conciencia de dominios que existen en el medio de los pares de polos extremos. Este reino de lo entremedio nos ayuda a comprender el papel relativo que tales extremos desempeñan en lo concreto, reino que poco a poco se torna en una realidad dominante a la cual los extremos están subordinados<sup>5</sup>.

Mientras que hay numerosas voces en contra de la idea de que el mundo físico posee sesgos contradictorios, es prácticamente conocimiento universal que el mundo de la conciencia tiene incontestablemente muchos aspectos antinómicos. Freud habló de cómo la mente está poblada de otras mentes que producen un juego constante de ideas opuestas. Jung expresó opiniones similares, y Piaget dedicó un volumen a investigar el hecho de que gran parte del pensamiento es contradictorio<sup>6</sup>. Como dijo Aldous Huxley: “La única gente completamente consistente son los muertos”<sup>7</sup>. Esto se aplica especialmente a la manera en que la conciencia deviene en el tiempo. ¿Qué es un acto de conciencia? Decididamente, todo acto de conciencia tiene contenido. Por lo tanto, no puede ser un punto en el tiempo, debe tener su duración a pesar de lo difícil que sea circunscribirla. Así como no hay puntos de Planck en el espacio físico, no los puede haber tampoco en el espacio temporal de la conciencia. El presente del tiempo vivido tiene extensión. Este presente, el ahora mental, lo experimentamos con un sentido de inmediatez incomparable, y como un

<sup>4</sup> A. N. WHITEHEAD, *Dialogues*, Boston: Little, Brown and Co., 1954, p. 16.

<sup>5</sup> Para un desarrollo de esta posición véase mi libro *In-Between: An Essay on Categories*, Washington, DC, y London: University Press of America y Center for Advanced Research in Phenomenology, 1988.

<sup>6</sup> J. PIAGET, *Recherches sur la contradiction*, Paris: Presses Universitaires de France, 1974.

<sup>7</sup> A. HUXLEY, *Complete Essays*, Chicago: I. R. Dee, 2000, Vol. II, p. 340.

fragmento de duración no nula extraído del flujo de la conciencia. ¿Es este flujo continuo? ¿Está hecho en cambio de cuantos de actividad mental? En este caso, ¿son estos cuantos contiguos o hay saltos entre ellos? Estas son cuestiones que sólo una fenomenología profunda podría contestar. De momento, nos resulta difícil precisar los límites del ahora vivido. Experimentamos vagamente que hay tránsitos de un ahora a otros, sabemos también que los actos de conciencia a menudo se intersectan, pero en la percepción del simple “dejarse vivir” no está en claro si hay una división nítida entre un acto y otro. ¿Hay acaso un entremedio entre los actos? Si tal, ¿es este entremedio vacío o lleno de vivencias infinitesimales, algo así como las “pequeñas percepciones” de Leibniz? Hay casos en que nos consta que la conciencia experimenta un salto fenoménico que simplifica en el acto la geometría del tiempo vivido. Tal es el caso cuando tomamos de súbito una decisión sin precedentes, o cuando tiene lugar una comprensión inesperada, un “¡aha!” instantáneo. En estos ejemplos experimentamos el equivalente mental de una cortadura de Dedekind: el tiempo vivido se percibe nítidamente dividido en un antes y un después. Pero estos casos son más bien excepcionales. Regularmente nuestra conciencia fluye sin que tengamos idea detallada de la estructura fina de tal fluir. De lo que sí no tenemos duda es de que somos capaces de identificar el ahora que estamos viviendo como un cuanto en el tiempo, un cuanto que, tal como el cuanto espacial, es a la vez discreto y continuo-discreto porque es decididamente distinguible de horas anteriores y futuros, continuo porque su breve duración carece de saltos interiores, aunque es sin duda un lapso indivisible. No siendo ni puramente discreto ni puramente continuo, todo ahora vivido posee pues su grado de separación y su grado de continuidad; no sabemos exactamente cuando comienza y cuando termina, pero de su presencia y duración tenemos certeza absoluta.

### 5. Precedentes históricos

Abrazar la gradación y circularidad de los conceptos opuestos como una característica no sólo inevitable sino también positiva del pensamiento no es una nueva actitud intelectual. Kant dijo en su *Crítica de la Razón Pura*: “los límites del concepto nunca permanecen dentro de fronteras seguras..., nunca puedo estar cierto de que la representación clara de un concepto dado ha sido efectuada completamente... La integridad del análisis de mi concepto está siempre en duda, y una multiplicidad de ejemplos sólo puede hacerla probable”<sup>8</sup>. La intelección de conceptos tiene por lo tanto un grado de vaguedad inevitable. Es bien conocida la actitud positiva de Kant hacia determinadas proposiciones antinómicas de la razón pura “en las cuales la razón cae inevitablemente de por sí, y que ciertamente protegen la razón contra el sopor de una convicción imaginaria, tal como la engendra una ilusión unilateral”<sup>9</sup>. Kant nos previene “de tomar una actitud obstinada, comprometiéndonos dogmáticamente a ciertas afirmaciones, y rehusando examinar abiertamente los argu-

<sup>8</sup>I. KANT, *Crítica de la Razón Pura*, varias ediciones, pp. A728-A729.

<sup>9</sup>Ibíd., p. B434.

mentos en favor de una posición contraria..., [lo cual conduce a] la *entanasia* de la razón pura”<sup>10</sup>. La aceptación de proposiciones antinómicas lleva de la mano a la aceptación de conceptos antinómicos, esto es, términos de círculos antinómicos que no son ni verdaderos ni falsos, sino simplemente ideas que coexisten en un estado de oposición natural.

Es imposible pues comprender categorías íntimamente entrelazadas sin interpretar su circularidad. Friedrich Schleiermacher afirmó por ejemplo que “la parte individual sólo puede ser comprendida por medio del todo, y el todo es inteligible sólo por medio de lo particular”<sup>11</sup>. Dilthey habló del carácter “semi-determinado” de las expresiones lingüísticas, en las cuales cada palabra es “determinada-indeterminada”<sup>12</sup>. Pero es Martin Heidegger quien describió la situación de la manera más explícita posible. Dice en *Ser y tiempo*: “si la interpretación filológica debe en todo caso operar en aquello ya comprendido, ¿cómo puede llevar cualquier resultado científico a su madurez sin moverse en un círculo? Sin embargo, de acuerdo con las leyes más elementales de la lógica, este círculo es un *circulus vitiosus*... Pero si vemos este círculo como vicioso y buscamos maneras de evitarlo, incluso si lo ‘sentimos’ como una imperfección inevitable, entonces el acto de comprensión ha sido incomprendido desde un principio... Lo que es decisivo no es salir del círculo, sino entrar en él de la manera correcta [pues] en el círculo está oculta una posibilidad positiva de la clase más primordial de conocimiento”<sup>13</sup>. No se trata, pues, de “tolerar” los círculos viciosos, sino de convertirlos en instrumentos eficaces del entendimiento.

## 6. De cómo lo abstracto retorna a ser parte de lo concreto

Entremos ahora al interior del círculo antinómico continuo-discreto. Todo continuo se presenta de hecho como unido y sin brechas, pero los continuos divisibles son potencialmente separables en trozos: el uno de hecho es un muchos en potencia. El círculo continuo-discreto está compuesto entre otras cosas por los círculos subordinados real-potencial y uno-muchos (muchos en el sentido de más de uno). Ahora bien, lo potencial es parte de lo real, informa lo real, es real en su propia medida. A su vez, lo real es normalmente la coagulación de potencialidades. Cada uno de los dos conceptos depende del otro, y sin él es ininteligible. Lo mismo debe decirse de uno y muchos. Un uno es un uno de muchos, y un muchos es muchos unos. De nuevo, las dos ideas forman parte la una de la otra y se necesitan mutuamente para poder originarse.

Pero las cosas no terminan aquí. Si a su vez entramos ahora al interior del círculo uno-muchos, nos encontramos con otro elemento semántico: el círculo escoger-reunir. De un muchos un uno se selecciona, y de varios unos dispersos un muchos se reúne. Etcétera. Una semántica concreta, una semántica

<sup>10</sup> *Ibid.*, subrayado en el original.

<sup>11</sup> Citado por Horst Ruthrof, *Semantics and the Body: Meaning from Frege to the Postmodern*, Toronto: University of Toronto Press, 1997, p. 177.

<sup>12</sup> *Ibid.*, p. 178.

<sup>13</sup> M. HEIDEGGER, *Being and Time*, traducido por J. Macquarrie y E. Robinson, London: SCM Press, 1962, pp. 194-195. Subrayados en el original. Ver también J. BARWISE y L. MOSS, *Vicious Circles*, Stanford: CSLI Publications, 1996, donde el tema se trata desde el punto de vista de la teoría de conjuntos.

con vista a entender lo real, debe aceptar el tipo de *regressus ad infinitum* que aquí hemos indicado como una de las marcas de lo concreto.

En nuestra incursión al círculo que contiene el continuo nos hemos encontrado con otro círculo que contiene la potencialidad como término antinómico. A primera vista, ambas ideas son irreales, y el continuo en particular es últimamente una noción matemática abstracta que contradice el hecho de que experimentamos la realidad en trozos finitos. A su vez, la potencialidad y sus variantes, lo posible, lo probable, no son reales y esto es todo. Pero consideremos la ecuación de Schrödinger. Es una ecuación que nos permite investigar y calcular procesos atómicos reales. Sin embargo, las soluciones de esta ecuación sólo dan, por ejemplo, la probabilidad de que una partícula esté localizada en una posición específica. Y bien, hablar de probabilidad en vez de determinación fija introduce sin duda un grado de irrealidad en un proceso real. Y como si esto fuera poco, antes de que la partícula sea observada en una posición particular, se la considera esparcida a lo largo y lo ancho de una extensión mayor que la del tamaño observado de la partícula. Spinoza opinaba que lo real es real en la medida que antes ha sido posible, lo cual, dejando de lado acontecimientos totalmente imprevisibles, es generalmente verdad. Pero nos encontramos ahora con que lo posible tiene su grado de realidad también, no es meramente probable. Difícil como nos resulta comprender cómo la localización de la partícula está esparcida más allá de lo que nuestras intuiciones macroscópicas nos permiten entender, hemos de aceptar tal conclusión si aceptamos que la partícula existe antes de ser observada y que, como tal, no surge de la nada.

Este ejemplo es un caso específico del hecho general de que cuando una concepción abstracta es indispensable para el entendimiento de una situación concreta, tal concepción deviene parte de lo real, es real desde el momento que la inyectamos en el hecho. Va contra nuestros hábitos pensar de esta manera, acostumbrados como estamos a separar nítidamente lo abstracto de lo concreto sin pensar en volverlos a mezclar. Sin embargo, sabemos bien que todo observador pone lo observado dentro de su propio marco subjetivo, y que este marco —su punto de vista, sus concepciones previas, las limitaciones de sus sentidos— informan lo observado de manera esencial. El observador deviene regularmente parte de lo observado. Esta inserción de lo subjetivo en lo objetivo hace que nuestros conceptos básicos, después de haber sido extraídos de lo concreto, retornen a lo concreto como parte constitutiva regresando así al lugar que originalmente ocupaban.

Lo dicho no implica de ninguna manera una debilitación del realismo, o un idealismo subrepticio que reduzca lo real a lo ideal en cierto grado. Lo que sí hace es poner de relieve la circunstancia de que las ideas, como la mente en que se alojan, son tan reales como cualquier otra entidad real. Lejos de provenir de un reino platónico, extraemos las ideas de la realidad, y al corazón de los hechos vuelven para ocupar su lugar en la estructura de esos hechos como los factores que originalmente eran.

Este comentario general tiene por objeto inmediato subrayar que el continuo no es puramente una idea irreal, y que incluso la mecánica cuántica cometería un serio error en considerarlo tal como consecuencia de su énfasis en los cuantos discretos. Otro error posible es el de considerar el continuo como una

noción “meramente subjetiva” carente de la realidad de lo objetivo. La separación absoluta de sujeto y objeto, mente y cuerpo, y otros términos paralelos semejantes pertenece a una metafísica concebida en blanco y negro que sólo sirve para oscurecer nuestro pensamiento. Llevada más allá de cierto punto, tal distinción carece de peso ontológico. Es evidente que nuestras intenciones subjetivas cambian la realidad del mundo objetivo cuando se llevan a cabo, devienen factores de lo objetivo. Es igualmente evidente que los eventos físicos tienen un impacto directo en la mente a través de la percepción. No hay barrera absoluta entre la mente y el cuerpo. Pero aún más: entre las conciencias existe una relación real incontestable que Husserl calificó de “intersubjetividad”, fenómeno que no se reduce a una superficial empatía psicológica, o a una representación imaginada, sino que consiste en la incorporación de otros egos en nuestra propia conciencia para sentir y pensar con ellos. En la intersubjetividad nos encontramos con un fenómeno singular que revela la existencia de conexiones íntimas reales entre las mentes, conexiones que hacen el vivir con otros más que una escapada furtiva del solipsismo. La experiencia de otras mentes tiene lugar directamente, no a través de un velo de imaginaciones. Como dice Max Scheler: “Nuestras experiencias y las de los otros se mezclan sin distinción unas de otras”<sup>14</sup>. Confirmando esta posición, la neurociencia de estos días está dando a ella un fundamento biológico. Las llamadas neuronas “espejo”, una clase especial de células cerebrales, reflejan el mundo exterior y, en particular, las experiencias de otras mentes. En un artículo titulado “Espejos en la mente”, investigadores de este tema afirman que estas neuronas “proveen una experiencia interna directa, y por lo tanto una comprensión, de los actos de otra persona, de su intención o emoción”<sup>15</sup>. No se trata aquí de deducir la emoción del otro, sino de un “reconocimiento directo porque el mecanismo del espejo neural despierta el mismo estado emocional en el observador. Así, cuando la gente usa la expresión ‘siento tu dolor’ para indicar comprensión y empatía, no se dan cuenta de lo verdadera que es esta aserción literalmente”<sup>16</sup>. Mi ego y los otros egos están fisiológicamente entretejidos. Lo “puramente subjetivo” es una ficción ontológica.

<sup>14</sup> M. SCHELER, *The Nature of Sympathy*, Hamden: The Shoe String Press, 1970, p. 246.

<sup>15</sup> La cita puede leerse en “Mirrors in the Mind”, en *Scientific American*, noviembre 2006, p. 56; los autores son G. Rizzolati, L. Fogassi, y V. Gallese.

<sup>16</sup> *Ibid.*, p. 60. Artículos adicionales: M. Iacoboni et al., “Grasping the Intentions of Others with One’s Own Mirror Neuron System”, *PLoS Biology*, Vol. 3, No. 3, pp. 529-535, marzo 2005. También: L. Fogassi et al., “Parietal Lobe: From Action Organization to Intention Understanding”, *Science*, Vol. 302, pp. 662-667, 29 Abril 2005.

## II

### 7. Continuos sin conjuntos

A pesar del carácter satisfactorio y ostensiblemente “final” de la teoría del continuo de Dedekind, esta concepción está lejos de revelar todos los aspectos esenciales del continuo. El problema con esta teoría proviene de su total dependencia de la noción de conjunto, noción eminentemente productiva, sin duda, pero tal que en su simplicidad se convierte en un verdadero obstáculo a nuestros esfuerzos por llegar a una comprensión adecuada de lo concreto, una concepción más profunda y realista de la que nos permite el pensar sólo en términos de la mera pertenencia de un elemento a una clase dada. Hay aún aspectos del continuo que necesitan ser expuestos sistemáticamente con independencia de las teorías establecidas. Tratemos, pues, de mirar al continuo en sí con toda la libertad que una intuición directa nos permite. Del contraste de lo que sigue con respecto a lo generalmente aceptado, podremos sacar una idea algo más completa de las vueltas de nuestro laberinto.

### 8. De la fenomenología del continuo

Al comienzo percibimos imprecisamente una extensión indefinida  $C$  —algo que se expande—. Esta percepción puede ser visual, auditiva, o táctil. A seguir, percibimos en  $C$  un número incierto de extensiones, algunas que saltan a la vista inmediatamente, otras que se observan en el seno de las primeras como resultado de una atención más detallada. Para evitar todo eco de terminología conjuntista, llamemos a estos dos tipos de extensión “aspectos” y “regiones en aspectos”. Así, podemos decir que los aspectos  $C_1, C_2, \dots$ , dan a  $C$  el inicio de una estructura, y en cada uno de estos aspectos las regiones  $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ , dan a cada aspecto su composición interna. Aunque designamos estas regiones con letras distintas, cada una no es necesariamente una entidad totalmente separada. Pensar lo contrario es sucumbir al atomismo insidioso inducido por el lenguaje escrito, un prejuicio que debemos evitar a toda costa si queremos ser capaces de comprender la naturaleza del continuo concreto tal como lo percibimos. Necesitamos un predicado binario de distinguibilidad  $D(x_1, x_2)$  para representar el hecho de que  $x_1$  es distinguible de  $x_2$  pero no necesariamente viceversa: cada distinción implica una dirección. La divisibilidad de dos regiones supone que tiene lugar en ambas direcciones: la divisibilidad es un caso particular de la distinguibilidad. Ahora bien, la distinguibilidad de lo percibido posee grados: algunos aspectos y regiones son más claramente distinguibles que otros. En todo caso, distinguir es una de las operaciones más fundamentales de la mente; sin un cierto grado de distinguibilidad sería imposible, por ejemplo, comprender la forma. Encima de esto, debemos notar que percibimos ciertas regiones y aspectos como unidos unos a otros —pero no todos—. También vemos que ciertas regiones y aspectos son partes de otras regiones y aspectos; otros no. Finalmente, percibimos que algunas regiones y aspectos yacen entre otras regiones y aspectos, lo cual constituye la relación ternaria de “estar en medio”, que, junto con las dos relaciones binarias de

“estar unido a” y “ser una parte de”, es esencial para la constitución de un continuo concreto y especialmente para su estructura topológica.

### 9. La inadecuación de continuos contruidos sobre la base de conjuntos

Las teorías matemáticas corrientes del continuo lo construyen de abajo hacia arriba: de puntos a conjuntos de puntos. Pero la unidad sin saltos de estos conjuntos depende del axioma totalmente externo de completitud. Si dejamos de lado este axioma, la unidad del continuo deviene inestable como ya hemos indicado: saltos pueden reaparecer. En la etapa pre-conjuntista en las que nos hemos ubicado debemos rechazar la idea de saltos —su presencia o ausencia— en la caracterización del continuo. Los saltos se definen en términos de puntos y conjuntos de puntos, pero los puntos son abstracciones matemáticas inexistentes, no son fenomenológicamente intuibles sino como puras ideas. Sólo somos capaces de percibir trozos, y trozos dentro de trozos, cada uno con su extensión. Los defectos principales de la teoría de Dedekind son (i) el papel mínimo que asigna a la unidad entre partes de un continuo —propiedad esencial— y (ii) el ignorar el hecho de que la idea de continuo ha precedido a la de conjunto y a las de reunir y separar: ha habido geometría durante siglos antes de que se pensase matemáticamente en términos de conjuntos.

La ironía máxima del punto de vista de Dedekind yace en su caracterización del continuo por medio de la menos absoluta e importante de sus propiedades, la divisibilidad, cuando lo que caracteriza el continuo en nuestra percepción es, por el contrario, su indivisibilidad, su unidad, la intrusión de partes unas en otras, y la presencia de enlaces irrompibles entre esas partes. Por esto es que la concepción conjuntista del continuo es tan irreal y no puede dar cuenta de sus propiedades más esenciales: (i) que tiene aspectos distinguibles, no cortaduras; (ii) que algunas de sus regiones forman una unidad mientras que otras no, unión siendo un predicado verdadero o falso y no una operación conjuntista sin excepciones; (iii) que carece de agujeros —no tiene regiones vacías— y no es nunca en sí un depósito universal de aspectos y regiones, sino que está siempre abierto a un análisis descendente y a una síntesis ascendente; (iv) que algunas de sus regiones se interpenetran mutuamente mientras que otras no; y finalmente, (v) que hay siempre regiones y más regiones entre regiones.

### 10. ¿Qué es un continuo?

Tal como lo percibimos, un continuo es una extensión con aspectos distinguibles y a menudo sobrepuestos, aspectos en los que, a su vez, regiones, sobrepuestas o no, pueden distinguirse. En esta extensión cada distinción expone un entremedio: toda distinción engendra su propio puente. Un continuo que fuese absolutamente separable no es de ninguna manera un continuo. Una teoría para un continuo concreto —un continuo continuo— debe reflejar varias características fundamentales: (i) su carácter primitivo —el hecho de que el continuo es un rasgo último de la realidad que debe describirse, no un edificio que ha de erigirse formalmente sobre una base arraigada en conjuntos de puntos—; (ii) el hecho de que el continuo no reúne regiones de una manera conjuntista, un axioma de comprensión tergiversaría su ausencia de límites,

tanto para figurar como un aspecto de continuos mayores, o analizarse en aspectos distinguibles: todo continuo se presenta como estando en el medio de una vasta expansión que va de lo muy grande a lo muy pequeño; (iii) el hecho de que cada continuo es sólo un aspecto de un continuo mayor, aspecto temporariamente considerado como universo de discurso, como continuo “universal” intermedio, para usar una expresión paradójica.

### 11. Mezclar versus coleccionar

El continuo de Dedekind, construido como es de abajo arriba, pasa por alto el hecho de que en el mundo real los todos y las partes intercambian papeles más libremente de lo que nuestro hábito de “coleccionar en un todo” nos permite percibir. Esta tendencia a reunir, a coleccionar y encerrar, es una gran fuente de descripciones engañosas de la realidad. Los todos no siempre reúnen sus partes; al contrario, a menudo las relaciones entre partes y todos son las de un mezclarse juntos. Al mezclarse, una parte a veces se extiende más allá de muchos de sus todos. Mezclarse es, desde luego, compatible con reunir, pero generalmente lo trasciende y borra todas estratificaciones de la relación parte-todo. El predicado “ser parte de” —distinto del predicado “pertenecer a”, o el de “estar incluido en” de la teoría de conjuntos— representa el sentido de mezclar al que nos estamos refiriendo.

### 12. En el medio de las cosas

Franz Kafka observó que las cosas nunca se presentan a sí mismas “por sus raíces, sino a cierto punto situado hacia el medio”. Esta es una descripción apta de nuestra situación perceptiva. Sólo podemos aproximar la realidad por su medio, realidad que en efecto bien puede carecer de raíces y ser imposible de coleccionar en su totalidad. Lo que hemos llamado continuo “universal” intermedio, designado por la letra  $C$ , está en medio de todas sus aspectos  $C_1, C_2, \dots$ , y cada aspecto está en medio de todas sus regiones  $x_1, y_1, \dots$ . Nuestros prejuicios conjuntistas nos impiden ver esta presencia perfectamente normal de cada todo en sus partes. Pero a su vez,  $C$  es un aspecto de extensiones más vastas. Etcétera.

### 13. El predicado de unión

Hay objetos que no pueden unirse aunque se los ponga en una misma caja y se los cierre ahí en perpetuidad. En el momento en que unir entidades deviene sinónimo con ponerlos en el mismo conjunto, la unificación pierde su sentido concreto y se convierte en una operación abstracta trivial. Para un uso realista, debemos considerar la unión como un predicado binario que se satisface si y sólo si se aplica a dos continuos que están verdaderamente unificados; esto es, si hay un enlace definido entre ellos, sea que sean contiguos o separados por otros continuos. Así, el continuo “universal” intermedio  $C$  está enlazado con cada uno de sus aspectos  $C_1, C_2, \dots$ , se unifica con cada uno de ellos —razón por la cual son *sus* aspectos, no por causa de ninguna relación de pertenencia—. De modo similar, cada aspecto está enlazado con cada una de sus regiones  $x_1, y_1, \dots$ , se une con cada una de ellas —razón por la cual son sus regiones—.

#### 14. El predicado del entremedio

El continuo “universal” intermedio  $C$  se interpola entre dos cualesquiera de sus aspectos; en símbolos,  $B(C_1, C, C_2)$ . Igualmente, cada aspecto se interpola entre dos cualesquiera de sus regiones,  $B(x_1, C_1, x_2)$ . La relación ternaria de entremedio no es una relación externa:  $C$  es esencial a sus aspectos, y  $C_1$  a sus regiones. Las expresiones  $B(C_1, C_2, C_3)$  y  $B(x_1, x_2, x_3)$  son también factibles. Y dado que entre dos regiones diferentes de un aspecto dado una tercera puede siempre interpolarse, el predicado de entremedio representa una relación densa entre regiones similar a la que los números racionales satisfacen con respecto al orden usual. Lo mismo puede decirse de los aspectos de un mismo continuo. Por último, estar entremedio —como la distinguibilidad— es una relación unidireccional; i. e.,  $x_2$  puede yacer entre  $x_1$  y  $x_3$ , pero no entre  $x_3$  y  $x_1$ .

#### 15. Lugares versus puntos

Nuestra concepción ordinaria del espacio-tiempo continuo, incluso la concepción relativista con sus sistemas de referencia en movimiento, es un modelo inadecuado del continuo real, pues se construye a partir de puntos como entidades últimas y hace de la separación un absoluto. Como hemos dicho, nunca percibimos puntos, sólo aspectos y regiones que se sobreponen, así como se sobreponen las diferentes perspectivas producidas por cada sistema de referencia relativista en movimiento. Decir que no hay puntos sino sólo aspectos y regiones significa que el continuo espaciotemporal carece de componentes últimos. Incluso los cuantos físicos poseen interior. Los sujetos de nuestros predicados deben pues ser lugares —regiones o aspectos—. Los lugares son unidades provisionales de discurso de la misma manera en que todo objeto parcialmente distinguido en nuestra percepción es una unidad de discurso. Dado que no existe la menor evidencia que apoye la existencia de un fondo o un tope de nuestro cosmos, debemos operar sobre la suposición más adecuada de que no hay átomos verdaderamente indivisibles y sin interior, así como que no hay un universo completo que contenga todo. Pertenece a la naturaleza de las cosas estar irremediabilmente ubicados en el medio; i. e., *sólo existe el medio* —hecho tanto ontológico como perceptivo—.

Los aspectos difieren de las regiones en que pueden tomarse temporariamente como universos; una región no. También, los aspectos están en el medio de sus regiones, así como entre cada par de las mismas, esto es, los aspectos son una especie de medio flotante de sus regiones; pero una región no está necesariamente en el medio de cualquier par de regiones. Como trozos de aspectos las regiones no pueden tomarse como “universos” de por sí, sólo los aspectos pueden considerarse como continuos, y cada continuo, a su vez, como aspecto de un continuo mayor.

#### 16. La incompletitud de todo análisis del continuo

Debemos diferenciar entre lo siguiente: (i) distinguibilidad, i. e., dadas dos regiones, por ejemplo, una tercera está unida con la primera pero no necesariamente con la segunda; (ii) no-intersección, i. e., dos regiones no tienen una tercera región como parte común; (iii) desunión, i. e., dos regiones carecen de

enlace; (iv) combinaciones de todos estos casos. Es posible que una región sea parte de otra sin que cada una sea distinguible de la otra. Además, la unidad es una forma de conexión aún para regiones que no tengan intersección alguna; asimismo regiones desunidas pueden tener partes en común. Finalmente, dada la falta de fondo y tope en el cosmos, el análisis del continuo no puede considerarse a ningún nivel como realmente concluido.

### 17. Topología de continuos sin puntos

En su artículo “Topología sin puntos”, Karl Menger bosqueja un sistema topológico en el cual los elementos últimos son pequeños “bloques” (“lumps” en inglés) en vez de puntos. Él concluye con la siguiente recomendación: “Por *bloque* significamos algo con una frontera bien definida. Pero las fronteras bien definidas son en sí el resultado de procesos que apuntan a un límite y no objetos de observación directa. Así, en vez de bloques podríamos usar algo más vago para comenzar —algo que tenga quizá varios grados de densidad o al menos admita un tránsito gradual a su complemento—. Tal teoría podría ser útil para la mecánica de ondas”<sup>17</sup>.

En la topología ordinaria, fronteras simples cerradas rodean una región completamente. Las fronteras de los continuos aquí bosquejados tienen dirección: pueden ser impenetrables en el sentido de  $x_1$  a  $x_2$  pero abiertas de  $x_2$  a  $x_1$ . La existencia de fronteras blandas en una dirección pero no en la otra significa que no toda frontera simple y aparentemente cerrada divide un interior del exterior. De hecho, algunas fronteras son su propio interior. Que tal es el caso no debe sorprendernos ya que incluso dentro del punto de vista conjuntista sabemos que hay curvas de Peano unidimensionales que llenan el plano, que hay curvas de Lebesgue con área positiva, y que hay superficies con volumen positivo.

### 18. En síntesis

Para recapitular brevemente, una multiplicidad de regiones y aspectos —una constituyendo una frontera, digamos— no puede coleccionarse de una manera conjuntista. Distinguiamos los continuos parcialmente antes de que podamos dividirlos, y aún entonces nuevas regiones siguen apareciendo entre regiones. Por lo tanto, distinguir es añadir, dividir es multiplicar el número de puntos de vista, crear nuevas interpenetraciones y enlaces: cada acto de distinción revela un entremedio. El separar en absoluto es demasiado concluyente para ser en realidad verdadero: hay a menudo una transición gradual de una región a sus complementos. Hay también un descenso sin fin y un ascenso sin fin en el análisis del continuo. Leibniz expresó varias veces la opinión de que existen mundos dentro de mundos al infinito. Podemos paralelamente afirmar que hay continuos dentro de continuos al infinito. No hay un continuo vacío y no hay un continuo absolutamente universal. Ahora bien, sería un error pensar que esta proliferación de continuos da a la idea de continuo una estructura menos exacta. Whitehead dijo que “la exactitud es un ideal del pensamiento y sólo se alcanza en la experiencia por la selección de una ruta de aproximación”<sup>18</sup>. Es

<sup>17</sup> K. Menger, “Topology without points”, *Rice Institute Pamphlet* 27, 1, 1940, p. 107.

<sup>18</sup> A. N. Whitehead, *The Concept of Nature*, Cambridge: Cambridge University Press, 1920, p. 59.

un engaño, pues, identificar la exactitud con una definibilidad nítida. Hay una etapa en la descripción de la realidad más allá de la cual la agudeza deviene sinónima con la inexactitud. En un dominio de entidades difusas, la exactitud demanda a veces vaguedad. Esta es una paradoja cotidiana del pensamiento científico que simplemente debemos aceptar y poner en buen uso<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup>Un desarrollo más extenso y formal de las ideas de la segunda parte de este trabajo puede verse en mi "Continua without Sets", *Logic and Logical Philosophy*, Toruń: Nicholas Copernicus University Press, 1993, pp. 95-128, publicado también en la *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, Zaragoza, Serie 2, Vol. 47, 1992, pp. 5-42.